Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2001.

В. А. Тиморин

Комбинаторика выпуклых многогранников

МЦНМО, 2002

УДК 514.172.45
ББК 22.15
Т41

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского Комитета Образования.

Тиморин В. А.

Т41 Комбинаторика выпуклых многогранников.— М.: МЦНМО, 2002.— 16 с.

ISBN 5-94057-024-0

Брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 16 и 17 июля 2001 года.

Они были посвящены двум глубоким и важным результатам из комбинаторики выпуклых многогранников — соотношениям Дена—Соммервиля и теореме о максимальном числе граней.

Доказательства этих фактов, придуманные в 80-е годы, произвели в свое время сенсацию: они замечательны по своей простоте и доступны любому усердному уму, несмотря на то, что основаны на глубоких идеях современной математики.

Брошюра написана кратко, но очень ясно. Такое изложение материала оставляет читателю обильную пищу для размышлений.

Адресована студентам младших курсов, хотя доступна и подготовленным школьникам старших классов.

ББК 22.162

ISBN 5-94057-024-0

Мы докажем два глубоких и важных результата из комбинаторики выпуклых многогранников — соотношения Дена—Соммервиля (Соммервиль, 1927) и теорему о максимальном числе граней (Макмюллен, 1970). Многие рассуждения будут носить интуитивный характер. Полные и строгие доказательства можно найти в ряде классических учебников и монографий (см. список литературы). Для понимания лекций желательно знание элементарной линейной алгебры. По крайней мере, необходимо интуитивное представление о пространстве $\mathbb{R}^d$ произвольной размерности d и (аффинных) подпространствах в $\mathbb{R}^d$. Подпространства размерности $d-1$ мы будем называть *гиперплоскостями*.

1. *Выпуклые многогранники*

Выделим конечный набор точек в $\mathbb{R}^d$. Поместим в эти точки произвольные неотрицательные массы. Множество центров масс, полученных таким образом, называется *выпуклым многогранником*. Некоторые выделенные точки (вообще говоря, не все) будут вершинами этого многогранника.

Задача. Дайте строгое определение вершины выпуклого многогранника (для дальнейшего достаточно интуитивного представления).

Есть и другое определение выпуклого многогранника. Фиксируем конечное число полупространств. Если пересечение этих полупространств ограниченно (т. е. лежит в шаре достаточно большого радиуса), то оно называется выпуклым многогранником. Эквивалентность двух приведенных выше определений выпуклого многогранника является нетривиальной (хотя и не очень сложной) теоремой (теорема Минковского—Вейля).

Задача. Докажите теорему Минковского—Вейля. Дайте строгое определение k-мерных граней (сокращенно k-граней) выпуклого многогранника (Указание: имеет смысл сначала определить грань, а уже потом — ее размерность).

Возможно, простейшим примером выпуклого многогранника является *симплекс*. Это d-мерный многогранник с $d+1$ вершиной. Любые две вершины симлекса соединены ребром. Любые три вершины — двумерной гранью и т. д. Еще один широко известный пример — *куб*. Это многогранник, заданный в координатах неравенствами

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \quad \ldots, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant 1.$$

Определение. Обозначим через f_0 число вершин выпуклого многогранника, через f_1 — число ребер и т. д. Вообще, через f_k обозначим число k-граней. Сам многогранник будем считать гранью, так что $f_d = 1$ (а при $k > d$ число f_k равно 0). Набор чисел $f_0, f_1, \ldots, f_d$ назовем *f-вектором* многогранника.

Задача. Посчитайте f-вектор для симплекса и куба.

Ответ: для симплекса $f_k = \binom{d+1}{k+1}$, для куба $f_k = \binom{d}{k} 2^{d-k}$.

Попробуем понять, что такое выпуклый многогранник *общего положения* (т. е. какими свойствами будет почти наверняка обладать произвольно взятый выпуклый многогранник). Например, три точки на плоскости общего положения не лежат на одной прямой, действительное число общего положения — иррациональное.

Допустим сначала, что вершины многогранника находятся в общем положении. Это, в частности, означает, что при $k < d$ никакие $k+2$ вершины не лежат в общей k-мерной плоскости, т. е. все k-грани — симплексы. Многогранники, у которых все грани, кроме него самого — симплексы, называются *симплициальными*. Если немножко пошевелить все вершины симплициального многогранника, то многогранник останется симплициальным. Более того, его f-вектор не изменится. Не изменится даже *комбинаторный тип*, т. е. характер примыкания граней.

С другой стороны, предположим, что гиперграни (т. е. грани размерности $d-1$) находятся в общем положении. Тогда ни через какую точку не проходит более чем d гиперграней. Значит, в каждой вершине сходится ровно d гиперграней. Такие многогранники называются *простыми*. Если немножко пошевелить все гиперграни простого многогранника, то он останется простым, и его f-вектор и комбинаторный тип не изменяется.

Задача. Докажите, что многогранники «совсем общего положения», т. е. симплициальные и простые одновременно — это только симплексы.

Кажущийся парадокс объясняется просто. На самом деле, два определения выпуклых многогранников концептуально различны. Общность положения в смысле первого определения никак не связана с общностью положения в смысле второго определения.

Будучи многогранниками общего положения, симплициальные и простые многогранники представляют наибольший интерес. На самом деле, их теории совершенно аналогичны.

Задача. Пусть Δ — выпуклый многогранник. Дайте определение выпуклого многогранника Δ^*, такого что вершины многогранника Δ соответствуют гиперграням многогранника Δ^*, вообще, k-грани многогранника Δ соответствуют $(d-k-1)$-граням многогранника Δ^*, и при этом отношения примыкания граней обращаются. Есть несколько способов определить многогранник Δ^*, комбинаторно эквивалентных, но геометрически различных.

В некоторых вопросах бывает удобнее иметь дело с простыми многогранниками, а в некоторых вопросах — с симплициальными.

Не всякий набор целых чисел $f_0, \ldots, f_{d-1}, f_d = 1$ является f-вектором некоторого выпуклого многогранника. Например, компоненты f-вектора выпуклого многогранника всегда удовлетворяют *теореме Эйлера*:

$$\sum (-1)^i f_i = 1.$$

Чуть позже мы выведем теорему Эйлера для любых выпуклых многогранников из соотношений Дена—Соммервиля для простых многогранников.

Никаких других линейных соотношений на компоненты f-вектора произвольного выпуклого многогранника нет. Однако есть соотношения типа неравенств. Например,

Теорема 1.1 (Штейниц). *Числа f_0, f_1, f_2 являются компонентами f-вектора некоторого трехмерного выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2, \quad 4 \leqslant f_0 \leqslant \frac{2}{3} f_1, \quad 4 \leqslant f_2 \leqslant \frac{2}{3} f_1.$$

Соотношение $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ — это теорема Эйлера. Если $f_0 < 4$, то многогранник не может быть трехмерным (любые три точки в трехмерном пространстве аффинно зависимы). Неравенство $f_0 \leqslant \frac{2}{3} f_1$ можно получить, заметив, что на каждом ребре по 2 вершины, а в каждой вершине сходится не менее трех ребер. Неравенства $4 \leqslant f_2 \leqslant \frac{2}{3} f_1$ получаются аналогично. Тем самым необходимость условий Штейница доказана. Достаточность доказывается гораздо сложнее.

Задача описания f-векторов произвольных выпуклых многогранников остается открытой. Еще сложнее задача описания всех возможных комбинаторных типов. Общие результаты в этом направлении получены только в размерностях не выше 3.

2. *Соотношения Дена—Соммервиля*

Пусть Δ — d-мерный выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$.

Определение. *F-полиномом* многогранника Δ называется производящая функция числа граней, то есть полином

$$F(t) = \sum_{i=0}^{d} f_i t^i.$$

Во многих случаях бывает удобней рассматривать другой полином, по которому F-полином восстанавливается однозначно:

$$H(t) = F(t-1) = \sum_{k=0}^{d} h_k t^k, \quad h_k = \sum_{i \geqslant k} f_i (-1)^{i-k} \binom{i}{k}.$$

Определение. Числа $h_0, \ldots, h_d$ образуют *h-вектор* многогранника Δ. Задание h-вектора эквивалентно заданию f-вектора. Именно, f-вектор простого многогранника выражается через h-вектор формулой

$$F(t) = H(t+1), \quad f_i = \sum_{k \geqslant i} h_k \binom{k}{i}.$$

Пример. F-полином симплекса размерности d равен

$$F(t) = (d+1) + \binom{d+1}{2} t + \binom{d+1}{3} t^3 + \ldots + t^d = \frac{(t+1)^{d+1} - 1}{t}.$$

Отсюда получаем следующее выражение для H-полинома симплекса:

$$H(t) = F(t-1) = \frac{t^{d+1} - 1}{t-1} = 1 + t + \ldots + t^{d-1} + t^d.$$

Следовательно, все компоненты h-вектора симплекса равны единице.

Пример. Пусть Δ_1 и Δ_2 — выпуклые многогранники размерностей m и $d-m$ соответственно. Определим *прямое произведение* $\Delta_1 \times \Delta_2$ многогранников Δ_1 и Δ_2. Для этого зафиксируем пару подпространств L_1 и L_2 размерностей m и $d-m$ соответственно. В пространстве L_1 разместим копию многогранника Δ_1, а в пространстве L_2 — копию многогранника Δ_2. Скажем, что точка x принадлежит многограннику $\Delta_1 \times \Delta_2$, если ее проекция на подпространство L_1 (параллельно подпространству L_2) лежит в Δ_1, а проекция на подпространство L_2 лежит в Δ_2.

Выразим h-вектор прямого произведения $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ через h-векторы многогранников Δ_1 и Δ_2. Заметим, что всякая k-мерная грань многогранника Δ является прямым произведением $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ грани Γ_1 многогранника Δ_1 и грани Γ_2 многогранника Δ_2, таких что $\dim(\Gamma_1) + \dim(\Gamma_2) = k$. Обратно, если Γ_1 — грань многогранника Δ_1, а Γ_2 — грань многогранника Δ_2, то прямое произведение $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ реализуется как грань многогранника Δ. Отсюда получаем:

$$f_k(\Delta_1 \times \Delta_2) = \sum_{i=0}^{k} f_i(\Delta_1) f_{k-i}(\Delta_2).$$

Другими словами, справедливо следующее соотношение на F-полиномы:

$$F_{\Delta_1 \times \Delta_2}(t) = F_{\Delta_1}(t) F_{\Delta_2}(t).$$

Но тогда точно таким же соотношением связаны H-полиномы:

$$H_{\Delta_1 \times \Delta_2}(t) = H_{\Delta_1}(t) H_{\Delta_2}(t).$$

Пример. Теперь мы можем посчитать h-вектор куба. F-полином отрезка I имеет вид $F_I(t) = 2 + t$, поскольку отрезок имеет 2 вершины и одно ребро. Следовательно, $H_I(t) = 1 + t$. Поскольку куб I^d есть прямое произведение d координатных отрезков, H-полином куба имеет вид

$$H_{I^d}(t) = (1 + t)^d.$$

Следовательно, h-вектор куба состоит из биномиальных коэффициентов: $h_k = \binom{d}{k}$.

В то время как для произвольных выпуклых многогранников единственным линейным соотношением на f-вектор служит теорема Эйлера, для простых (или симплициальных) многогранников имеется уже примерно $d/2$ линейных соотношений. Например, нетрудно получить соотношение между количеством ребер и количеством вершин простого многогранника: $f_1 = d \cdot f_0/2$. Действительно, во всякой вершине сходится d ребер, а на каждом ребре — по две вершины. Все линейные соотношения нашел и доказал Соммервиль в 1927 году (некоторые важные частные случаи были ранее разобраны Деном). Эти соотношения получили название *соотношений Дена—Соммервиля*:

Теорема 2.1. *Для всякого простого d-мерного многогранника*

$$h_k = h_{n-k}, \quad h_0 = h_d = 1.$$

Другими словами, h-вектор симметричен относительно середины.

Замечание для специалистов. Доказательство соотношений Дена—Соммервиля, приведенное ниже, является аналогом рассуждения из теории Морса, доказывающего двойственность Пуанкаре. На самом деле, имеется непосредственная связь между соотношениями Дена—Соммервиля и двойственностью Пуанкаре в гомологиях некоторого компактного многообразия (эта связь обнаружена Хованским в 1980 г.).

Пусть Δ — простой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим произвольную линейную функцию l на пространстве $\mathbb{R}^d$, не постоянную ни на какой грани многогранника Δ положительной размерности. Такую функцию мы будем называть *общей линейной функцией* на многограннике. Вершина многогранника индекса m (относительно общей линейной функции l) — это такая вершина, из которой ровно m ребер идут вниз (то есть функция l, ограниченная на эти ребра, убывает). Остальные ребра идут вверх.

Обозначим через $B(l, m)$ число вершин индекса m многогранника Δ относительно общей линейной функции l.

Предложение 2.1. *Число $B(l, m)$ не зависит от конкретного выбора общей линейной функции l и явно выражается через компоненты f-вектора многогранника. Именно,*

$$B(l, m) = h_m.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения заметим, что вершина индекса m есть точка максимума нашей линейной функции, ограниченной на какую-то грань размерности $\leqslant m$. Посчитаем теперь число f_i следующим образом. Каждой i-мерной грани многогранника Δ сопоставим вершину, в которой ограничение функции l на рассматриваемую грань принимает наибольшее значение. Получим вершину индекса $m \geqslant i$. Однако из каждой такой вершины выходит вниз ровно $\binom{m}{i}$ i-мерных граней. Следовательно, для того чтобы посчитать число граней размерности i в многограннике Δ, нужно посчитать все вершины индекса $\geqslant i$, причем вершину индекса m следует посчитать $\binom{m}{i}$ раз. Таким образом,

$$f_i = \sum_{m \geqslant i} B(l, m) \binom{m}{i}.$$

Следовательно, по определению h-вектора, $B(l, m) = h_m$. Отсюда видно, что число $B(l, m)$ не зависит от выбора линейной функции l. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Сменим знак у линейной функции l. С одной стороны, согласно доказанному предложению, число $B(l, m)$ не изменится. С другой стороны, все точки индекса m превратятся в точки индекса $d - m$. Поэтому

$$h_m = B(l, m) = B(-l, d - m) = h_{d-m}.$$

Соотношения $h_0 = h_d = 1$ очевидны, поскольку общая линейная функция, ограниченная на выпуклый многогранник, принимает минимальное (соотв., максимальное) значение только в одной вершине. $\square$

Из соотношений Дена—Соммервиля вытекает, в частности, теорема Эйлера. Для простого многогранника теорема Эйлера эквивалентна равенству $h_0 = 1$, т. е. одному из доказанных выше соотношений. Если многогранник не является простым, то его можно сделать простым следующим образом. Сначала отрежем все вершины. Для того, чтобы отрезать вершину, проведем гиперплоскость, отделяющую эту вершину от всех остальных. После этого выкинем полупространство, содержащее отрезаемую вершину. Из выпуклого многогранника после такой процедуры снова получится выпуклый многогранник. После того, как мы отрезали все вершины, отрежем аналогичным образом все ребра и т. д. В результате получим простой многогранник.

Теперь выясним, каким образом ведет себя *эйлерова характеристика* h_0 при отрезаниях граней. Прежде всего заметим, что эйлерова характеристика *аддитивна*, то есть если два выпуклых многогранника Δ_1 и Δ_2 дают в объединении выпуклый многогранник Δ, то

$$h_0(\Delta) = h_0(\Delta_1) + h_0(\Delta_2) - h_0(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

При отрезании вершины мы удаляем из многогранника некоторую пирамиду. Непосредственным вычислением легко проверить, что эйлерова характеристика пирамиды равна 1 (нужно предположить по индукции, что основание пирамиды удовлетворяет теореме Эйлера). Отсюда видно, что при отрезании вершины эйлерова характеристика не меняется. При отрезании грани произвольной размерности это тоже верно. Достаточно заметить, что удаленный кусок комбинаторно эквивалентен прямому произведению пирамиды на отрезанную грань.

Задача. Проведите это рассуждение во всех деталях.

3. *Смежностные многогранники*

Теперь займемся решением следующей *задачи о максимальном числе граней*:

Задача. Описать многогранники, реализующие максимум f-вектора при фиксированном числе вершин (или гиперграней).

Эта задача была решена Макмюлленом в 1970 г.

Прежде всего, можно существенным образом ограничить класс рассматриваемых многогранников:

Теорема 3.1. *Максимум f-вектора при фиксированном числе вершин достигается на некотором симплициальном многограннике. Максимум f-вектора при фиксированном числе гиперграней достигается на некотором простом многограннике.*

Действительно, если в несимплициальном многограннике пошевелить все вершины общим образом, количество граней только увеличится (каждая несимплициальная грань разобьется на несколько симплициальных). Аналогично, если в непростом многограннике общим образом пошевелить все гиперграни, количество граней только увеличится (например, всякая непростая вершина распадется на несколько простых).

Задача. Дайте строгое доказательство теоремы 3.1.

Укажем естественную оценку сверху для числа k-граней многогранника с n вершинами:

$$f_k \leqslant \binom{n}{k+1}. \qquad (1)$$

Эта оценка очевидна для симплициальных многогранников (всякой k-мерной грани можно однозначно сопоставить $(k+1)$-элементное множество ее вершин). Для произвольных многогранников оценка вытекает из теоремы 3.1.

Имеет место аналогичная оценка для числа k-мерных граней d-мерного многогранника с n гипергранями:

$$f_k \leqslant \binom{n}{d-k}. \qquad (2)$$

Эта оценка очевидна для простых многогранников (всякой k-мерной грани соответствует $d-k$ гиперграней, ее содержащих). Для произвольных многогранников оценка вытекает из теоремы 3.1.

В случае симплекса в обоих неравенствах (1) и (2) достигается равенство (в этом случае $n=d+1$). Спрашивается, может ли равенство в (1) и (2) достигаться при $n>d+1$? Например, бывают ли многогранники (отличные от симплекса), в которых любые две вершины соединены ребром? В трехмерном пространстве, очевидно, таких многогранников не бывает. Однако в четырехмерном пространстве бывают. Вообще, в d-мерном пространстве существуют многогранники, в которых всякий набор из $[d/2]$ вершин принадлежит некоторой грани размерности $[d/2]-1$. Такие многогранники называются *смежностными*.

Смежностные многогранники реализуют максимум числа k-мерных граней (при фиксированном числе вершин) в случае $k < [d/2]$. Однако, поскольку на f-вектор симплициального многогранника имеется $[(d+1)/2]+1$ линейных соотношений (соотношения Дена—Соммервиля), он полностью определяется значениями f_k при $k < [d/2]$. В частности, все симплициальные смежностные многогранники с одинаковым числом вершин имеют один и тот же f-вектор. Оказывается, что этот f-вектор и доставляет максимум среди всех f-векторов с фиксированным $f_0 = n$. Это утверждение было доказано Макмюлленом в 1970 году и известно под названием *теоремы о максимальном числе граней* (Upper bound theorem).

Теорема о максимальном числе граней для простых многогранников формулируется двойственным образом. Именно, назовем *дуально-смежностным* всякий многогранник, в котором любые $[d/2]$ гиперграней пересекаются. Все простые дуально-смежностные многогранники имеют один и тот же f-вектор. Этот f-вектор и является максимальным среди всех f-векторов многогранников с фиксированным $f_{d-1} = n$.

В четномерном пространстве всякий смежностный многогранник симплициален, а всякий дуально-смежностный прост. В нечетномерном пространстве это не так. Например, в $\mathbb{R}^3$ любой многогранник является смежностным и дуально-смежностным (поскольку всякая вершина принадлежит некоторой 0-мерной грани, а всякая двумерная грань непуста). Вообще, пирамида над четномерным смежностным (отличным от симплекса) многогранником является смежностным несимплициальным многогранником.

Ниже мы построим примеры смежностных многогранников, а затем приведем доказательство теоремы о максимальном числе граней.

4. *Циклические многогранники*

Ниже мы рассмотрим важный пример смежностных многогранников — циклические многогранники.

Определение. Рассмотрим *кривую Веронезе*, являющуюся образом числовой прямой при *отображении Веронезе*

$$t \mapsto v(t) = (t,\, t^2,\, \ldots,\, t^d).$$

Циклическим многогранником называется выпуклая оболочка некоторого конечного множества A на кривой Веронезе, то есть наименьший выпуклый многогранник, содержащий A. Нетрудно показать, что все точки множества A являются вершинами циклического многогранника (это следует из доказательства теоремы 4.1).

Предложение 4.1. *Любые $d+1$ точек на кривой Веронезе аффинно независимы, т. е. не лежат в общей гиперплоскости.*

Доказательство. Гиперплоскости в пространстве $\mathbb{R}^d$ мы будем отождествлять с многочленами степени d. Именно, пусть гиперплоскость задается уравнением

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_d x_d = 0.$$

Тогда ей соответствует многочлен

$$f_\alpha(t) = \alpha(v(t)) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_d t^d.$$

Заметим, что многочлен f_α не равен тождественно нулю. Точка $v(t)$ принадлежит гиперплоскости $\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $f_\alpha(t) = 0$.

Предположим теперь, что точки $v(t_1)$, $v(t_2)$, $\ldots$, $v(t_{d+1})$ лежат в одной гиперплоскости $\alpha = 0$. Тогда многочлен f_H обращается в 0 в точках $t_1, \ldots, t_{d+1}$. Но если многочлен степени d обращается в 0 в $d+1$ точке, то этот многочлен тождественно равен нулю. Противоречие. $\square$

Задача. Выведите из предложения 4.1, что любые $k < d+1$ точек на кривой Веронезе аффинно независимы, то есть не лежат ни в каком общем подпространстве размерности $k-2$.

Теорема 4.1. *Всякий циклический многогранник является смежностным.*

Доказательство. Пусть $k \leqslant [d/2]$. Зафиксируем любые k вершин $v(t_1), \ldots, v(t_k)$ нашего циклического многогранника. Пусть $v(t_{k+1}), \ldots$ $\ldots, v(t_n)$ — остальные вершины. Для доказательства теоремы достаточно предъявить такой многочлен f_α (см. доказательство предложения 4.1), что

$$f_\alpha(t_1) = f_\alpha(t_2) = \ldots = f_\alpha(t_k) = 0, \quad f_\alpha(t_{k+1}) > 0, \ldots, f_\alpha(t_n) > 0.$$

Действительно, выделенные k вершин будут лежать в гиперплоскости $\alpha = 0$, а остальные вершины — по одну сторону от нее. Это означает, что циклический многогранник пересекается с рассматриваемой гиперплоскостью по грани. Поскольку зафиксированные k вершин аффинно независимы, эта грань является симплексом размерности $k-1$, а все выделенные вершины — вершинами этого симплекса.

Искомый многочлен f_α можно задать явной формулой:

$$f_\alpha(t) = g(t)\prod_{i=1}^{k}(t - t_i)^2,$$

где $g(t)$ — произвольный многочлен степени $d - 2k$, принимающий положительные значения в точках $t_{k+1}, \ldots, t_n$ (очевидно, такой многочлен существует). □

5. *Теорема о максимальном числе граней*

Теперь мы готовы доказать теорему о максимальном числе граней:

Теорема 5.1. *Максимум f-вектора выпуклого многогранника с фиксированным f_0 достигается на всяком смежностном симплициальном многограннике* (*в частности, на циклическом многограннике*). *Максимум f-вектора выпуклого многогранника с фиксированным f_{d-1} достигается на всяком простом дуально-смежностном многограннике* (*в частности, на многограннике, двойственном к циклическому*).

Достаточно доказать вторую часть этой теоремы (относящуюся к простым многогранникам). Первая часть получится из соображений двойственности.

Лемма 5.1. *Если Γ — гипергрань простого многогранника P, то $h_k(\Gamma) \leqslant h_k(P)$.*

Доказательство. Рассмотрим общую линейную функцию l на многограннике P, значение которой на всех вершинах гиперграни Γ меньше, чем на остальных вершинах многогранника. Ограничение функции l на гипергрань Γ является общей линейной функцией на этой гиперграни, поэтому можно говорить об индексе вершины относительно Γ. Все вершины индекса k относительно гиперграни Γ имеют тот же индекс относительно всего многогранника P (поскольку дополнительное ребро всегда смотрит в сторону возрастания функции l). Отсюда неравенство $h_k(\Gamma) \leqslant h_k(P)$. □

Лемма 5.2. *Если P — дуально-смежностный простой многогранник, то для всякой гиперграни Γ и числа $k + 1 \leqslant [d/2]$ имеет место равенство $h_k(\Gamma) = h_k(P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть l — та же линейная функция на многограннике P, что и в доказательстве леммы 5.1. Мы хотим доказать, что всякая вершина индекса k принадлежит грани Γ. Предположим противное: нашлась некоторая вершина v индекса k, не принадлежащая Γ. Рассмотрим верхнюю сепаратрису F вершины v. Грань F имеет размерность $d-k$, и, следовательно, получается в пересечении k гиперграней $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$. Очевидно, $F \cap \Gamma = \varnothing$, то есть $\Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_k \cap \Gamma = \varnothing$. Однако в дуально-смежностном многограннике пересечение $k+1 \leqslant [d/2]$ гиперграни всегда непусто. Противоречие. □

Лемма 5.3. *Для всякого простого d-мерного многогранника P с n гипергранями имеет место неравенство*

$$h_{k+1}(P) \leqslant \frac{n-d+k}{k+1} h_k(P).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Назовем *k-инцидентностью* многогранника P пару (Γ, x), состоящую из гиперграни Γ и ее вершины x, имеющей индекс k относительно Γ. Посчитаем число k-инцидентностей I_k двумя способами. С одной стороны, очевидно,

$$I_k = \sum_{\Gamma} h_k(\Gamma),$$

где суммирование ведется по всем гиперграням многогранника P. В силу леммы 5.1 отсюда следует, что $I_k \leqslant n h_k(P)$.

С другой стороны, вершина x может участвовать в k-инцидентности только если ее индекс равен k или $k+1$. Если вершина x имеет индекс k, то ей соответствуют k-инцидентности вида (Γ, x), где гипергрань Γ содержит все ребра, идущие вниз из вершины x. Таких граней ровно $d-k$. Если же индекс вершины x равен $k+1$, то эта вершина участвует в k-инцидентностях вида (Γ, x), где гипергрань Γ содержит все ребра, идущие вверх из точки x. Таких гиперграней ровно $k+1$. Таким образом,

$$I_k = (d-k)h_k(P) + (k+1)h_{k+1}(P).$$

Комбинируя это равенство с неравенством $I_k \leqslant n h_k(P)$, получаем утверждение леммы. □

Следствие 5.1. *Для всякого простого d-мерного многогранника P с n гипергранями*

$$h_k(P) \leqslant \binom{n-d+k-1}{k}.$$

Следствие 5.2. *Для дуально-смежностного простого d-мерного многогранника P при $k \leqslant [d/2]$ имеет место равенство*

$$h_k(P) = \binom{n-d+k-1}{k}.$$

Это вытекает из леммы 5.2 и из доказательства леммы 5.3 (все неравенства в этой лемме заменяются равенствами).

Следствия 5.1 и 5.2 (вместе с соотношениями Дена—Соммервиля) доказывают теорему о максимальном числе граней.

Литература

[1] А. Бренстед. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.

[2] В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.

[3] B. Grünbaum. Convex polytopes. London: Interscience Publ., 1967.

[4] P. McMullen. The maximum number of faces of a convex polytope. Mathematika, **17** (1970), 179—184.

Оглавление

Владлен Анатольевич Тиморин

Комбинаторика выпуклых многогранников

Редактор М. Вялый
Серийное оформление обложки разработал М. Панов.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 27.2.2002 г. Формат $60 \times 88\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 1. Тираж 1000 экз. Заказ № .

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типографии «Транспечать»
107078, Москва, Каланчевский тупик, д. 3/5

ISBN 5-94057-024-0

9 785940 57024 >